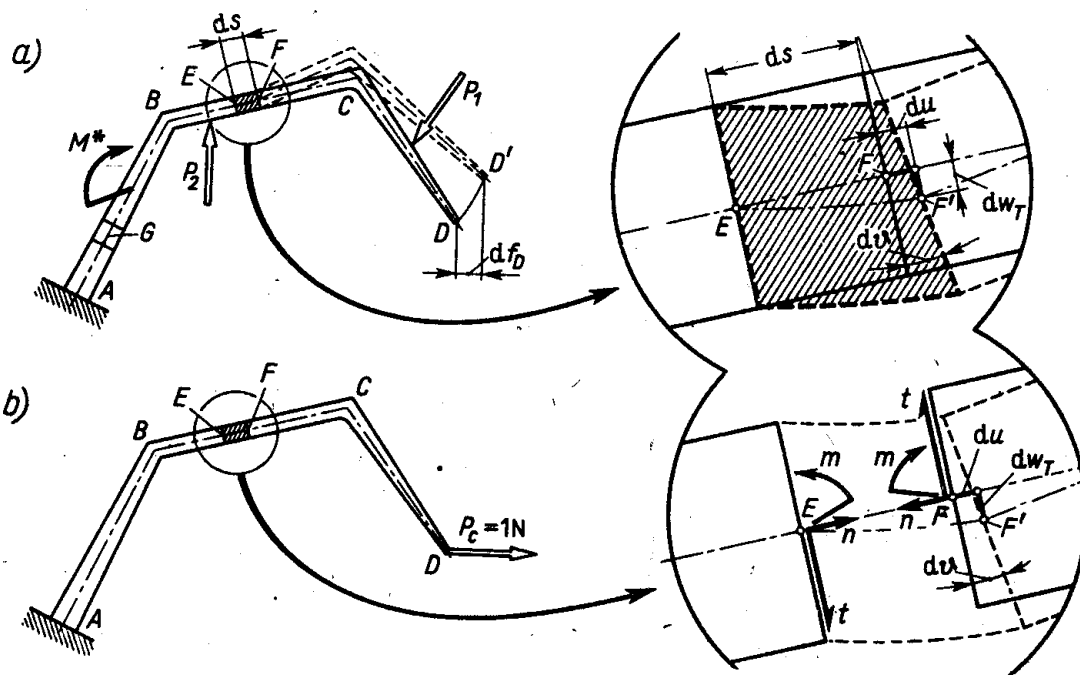


9.3. Wyznaczanie przemieszczeń w ustrojach płaskich

Metodę wyznaczania przemieszczeń objaśnimy na przykładzie płaskiego ustroju (rys. 9.20a), w którym *chcemy na razie znaleźć poziome przesunięcie df_D wywołane założoną z góry deformacją jednego tylko elementu EF* . Deformacja ta składa się ze względnego obrotu przekrojów E i F o kąt $d\vartheta$, rozsunęcia ich o du i prostopadłego do osi pręta przesunięcia dw_T .

Postawione zadanie można rozwiązać wykreślnie. Traktując przekrój E jako bazę, wrysowujemy zdeformowany element EF , a potem dopasowujemy do przemieszczonego przekroju F' nieodkształconą resztę, tj. część FCD .

Zamiast tej niedokładnej metody wykreślniej stosujemy rozwiązanie analityczne *metodą Maxwella-Mohra*. W tym celu (zupełnie niezależnie od pierwotnego układu sił) obciążamy ustrój w punkcie D jednostkową poziomą siłą $P_c = 1$ N, a więc mającą kierunek poszukiwanego przesunięcia (rys. 9.20b). Siła ta wywołuje w utwierdzonym przekroju A reakcje, a w innych odpowiedni wysiłek zapewniający przy myślowym przecięciu równowagę każdej części ustroju. W nieskończenie bliskich przekrojach E i F składowe tego wysiłku są: moment gnący m , siła tnąca t i wzdłużna n . Składowe te ujawniają się jako siły zewnętrzne, gdy usuniemy myślowo element EF , przy czym części ABE i FCD zostają w równowadze. Ten ostatni fakt ujmiemy w zależność opartą na znanej z mechaniki *zasadzie prac przygotowanych*. Zasada ta głosi, że *warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi układu materialnego jest, żeby suma prac wszystkich sił (zewnętrznych i wewnętrznych) na dowolnym przesunięciu przygotowanym, tj. zgodnym z narzuconymi więzami, była równa zeru*. Dla badanego tu układu sił $P_c = 1$ N, m , t i n przyjmiemy jako przesunięcia przygotowane układ przemieszczeń z zadania pierwotnego (rys. 9.20a). W tej sytuacji prace przygotowane są



Rys. 9.20. Określenie przemieszczenia ustroju przy użyciu zasady prac przygotowanych

odpowiednio $1 \cdot df_D$, $-m d\vartheta$, $-t dw_T$ i $-n du$, a ich suma⁽¹⁾ w badanym tu stanie równowagi jest równa zero, czyli

$$1df_D - m d\vartheta - t dw_T - n du = 0,$$

skąd mamy poszukiwane przesunięcie poziome punktu D

$$df_D = (m/1) d\vartheta + (t/1) dw_T + (n/1) du, \tag{a}$$

przy czym wartości liczbowe $(m/1)$, $(t/1)$, $(n/1)$ są nadal równe m , t , n , natomiast ich miana $N m/N$ bądź N/N oznaczają stosunek danej składowej wysiłku do jednostkowego obciążenia.

Rozszerzmy teraz pierwotne zadanie i założmy, że wymuszoną deformację $d\bar{\vartheta}$, $d\bar{u}$, $d\bar{w}_T$ ma element G , a nie EF . Postępując jak poprzednio określimy nowe poziome przesunięcie punktu D

$$d\bar{f}_D = (\bar{m}/1) d\bar{\vartheta} + (\bar{t}/1) d\bar{w}_T + (\bar{n}/1) d\bar{u}, \tag{b}$$

gdzie \bar{m} , \bar{t} , \bar{n} — składowe wysiłku w elemencie G odpowiadające tej samej sile $P_c = 1 N$. Jeżeli deformacji ulegają jednocześnie elementy EF i G , to wypadkowe poziome przesunięcie punktu D jest według zasady superpozycji algebraiczną sumą wyrażeń (a) i (b). Uogólniając to na przypadek deformacji *wszystkich* elementów pierwotnego ustroju, otrzymamy

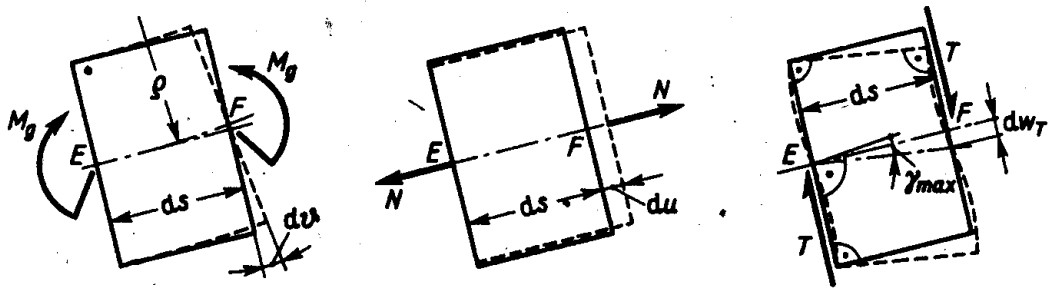
$$f_D = \int df_D = \int m d\vartheta + \int t dw_T + \int n du, \tag{9.1}$$

jako całkowite poziome przesunięcie punktu D . Całkowanie (sumowanie) obejmuje tu wszystkie pręty ustroju. Zmienną niezależną jest współrzędna s określająca położenie

⁽¹⁾ W bilansie tym nie ma pracy reakcji, gdyż utwierdzony przekrój A nie ma żadnego przemieszczenia.

przekroju, a jej funkcjami zadane z góry $d\vartheta$, dw_T i du oraz odpowiadające $P_c = 1$ N wielkości m , t i n , których miana, jak mówiono, są Nm/N oraz N/N.

Zależność (9.1) wynika z samych tylko zasad statyki, jest więc słuszna niezależnie od tego, czy materiał jest sprężysty, czy nie, oraz *niezależnie od przyczyn wywołujących deformację*, gdyż stanowi ona analityczny odpowiednik metody wykreślnej mającej te właśnie



Rys. 9.21. Określenie elementarnych odkształceń odcinka pręta

cechy. Największe jednak znaczenie ma przypadek, gdy badany ustrój (rys. 9.20a) jest sprężysty i przyczyną jego odkształcenia jest obciążenie P_1 , P_2 , M^* , wywołujące w przekrojach elementu EF wysiłki o składowych M_θ , N i T (rys. 9.21). W wyniku tego przekroje elementu ulegają

$$\text{obrotowi o kąt } d\vartheta = ds/\rho = M_\theta ds/EJ_y, \quad (c)$$

$$\text{rozsunięciu o } du = N ds/EA \quad (d)$$

oraz przesunięciu dw_T wywołanym naprężeniami τ od siły T . Gdyby rozkład τ był równomierny, czyli $\tau = \tau_{sr} = T/A$, to przekrój zostałby płaski i wtedy byłoby $dw_T = (\tau_{sr}/G) ds = T ds/GA$. Przy nierównomiernym rozkładzie τ , ale płaskim przekroju, byłoby $dw_T = \gamma_{max} ds = \tau_{max} ds/G$. W rzeczywistości (rys. 5.37) przekrój nie zostaje płaski i szukane dw_T jest mniejsze niż ta druga wartość, ale większa od pierwszej, co wyrażamy pisząc, że

$$dw_T = \psi T ds/GA, \quad (e)$$

gdzie bezwymiarowy współczynnik ψ zależy od kształtu przekroju. Zgodnie z tym, co powiedziano, mamy $1 \leq \psi \leq (\tau_{max}/\tau_{sr})$ i na przykład dla przekroju prostokątnego $\psi = 6/5$, dla kołowego $\psi = 32/27$ itd. (patrz także zadanie 12 art. 9.4).

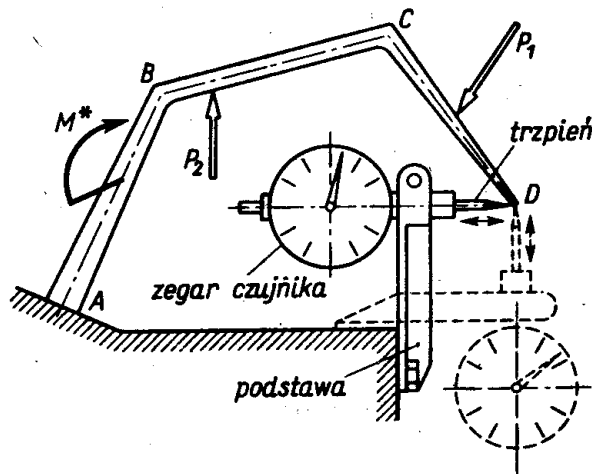
Wstawiając teraz wyniki (c), (d) i (e) do (9.1) otrzymujemy

$$f = \int \frac{M_\theta m ds}{EJ_y} + \int \frac{\psi T t ds}{GA} + \int \frac{N n ds}{EA}, \quad (9.2)$$

jako ogólne wyrażenie przemieszczenia f w płaskim ustroju. Wyrażenia podcałkowe są przy tym *dobrze*, gdy składowe wysiłki M_θ i m , T i t , N i n mają odpowiednio *zgodne* zwroty, tak bowiem wynika z całosci przeprowadzonych rozważań. Dodatnia wartość f oznacza, że przemieszczenie to ma kierunek zgodny z siłą $P_c = 1$ N, gdyż tylko wtedy praca jej jest dodatnia, jak założono.

Zasadniczą ideę metody Maxwella-Mohra, tj. wprowadzenie jednostkowej siły P_c , można przyrównać do pomiaru warsztatowego (rys. 9.22). I tak, chcąc zmierzyć poziome

przesunięcie punktu D ustroju, umocujemy na podłożu zegarowy czujnik, którego przesuwany trzpień napędzający wskazówkę dotyka tego punktu. Kierunek trzpienia musi być poziomy, gdyż tylko wtedy jego przesuw odpowiada zamierzonemu pomiarowi. Zrozu-



Rys. 9.22. Analogia sił jednostkowych do pomiaru warsztatowego

miała jest przy tym różnica między obciążeniem P_1 , P_2 , M^* wywołującym odkształcenia obiektu a czujnikiem jako elementem pomiarowym. Porównując ten opis z poprzednimi rozważaniami widzimy całkowitą analogię, z tym że w pojęciach statyki rolę czujnika spełnia jednostkowa siła P_c o kierunku, który zdolny jest „pomierzyć” szukane przesunięcie.

Stosując tę analogię widzimy, że dla pomiaru pionowego przesunięcia punktu D trzpień czujnika musi być pionowy i musi dotykać punktu D . Tłumacząc to na pojęcia statyki powiemy, że dla obliczenia pionowego przesunięcia punktu D należy w nim przyłożyć pionową jednostkową siłę spełniającą rolę czujnika, a więc mającą zupełnie inną rolę niż rzeczywiste obciążenie ustroju.

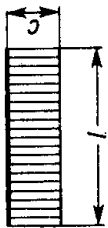
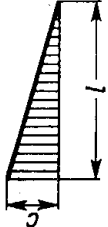


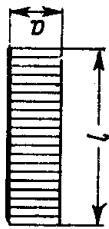
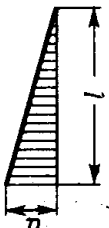

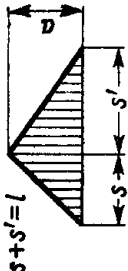
W podanym przykładzie oraz innych zadaniach tego typu można wyodrębnić trzy etapy. Pierwszy z nich, to odpowiedni dobór siły jednostkowej P_c „mierzącej”, jak na rys. 9.20b, poszukiwane przesunięcie, tj. poziome, punktu D . Etap drugi, to określenie, jak podano w art. 9.1, przebiegu M_g , T i N dla rzeczywistego obciążenia ustroju oraz przebiegu m , t i n dla obciążenia siłą (czujnikiem) $P_c = 1$ N. Wynikiem tego etapu są bądź wykresy, jak na rys. 9.3, bądź funkcje $M_g(s)$, ..., $n(s)$ współrzędnej s cechującej położenie przekroju. Etap ostatni, to obliczenie całek wyrażenia (9.2). Gdy pręty ustroju mają stałe sztywności EJ_y , EA i GA , wówczas funkcje podcałkowe są iloczynem dwóch funkcji, np. $M_g(s) m(s)$. Bardzo często co najmniej jedna z tych funkcji jest liniowa i wtedy obliczenie jest uproszczone, gdyż całka jest typu

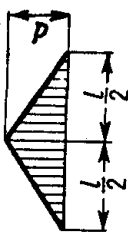
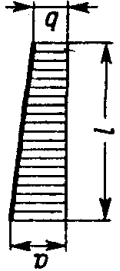
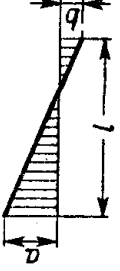
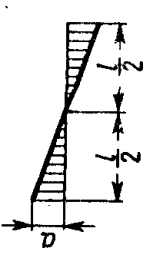
$$\int_{s_1}^{s_2} Y(s) y(s) ds,$$

gdzie $Y(s)$ — dowolna (nieliniowa, łamana, nieciągła itp.) funkcja s (rys. 9.23), zaś

Tablica 9.1

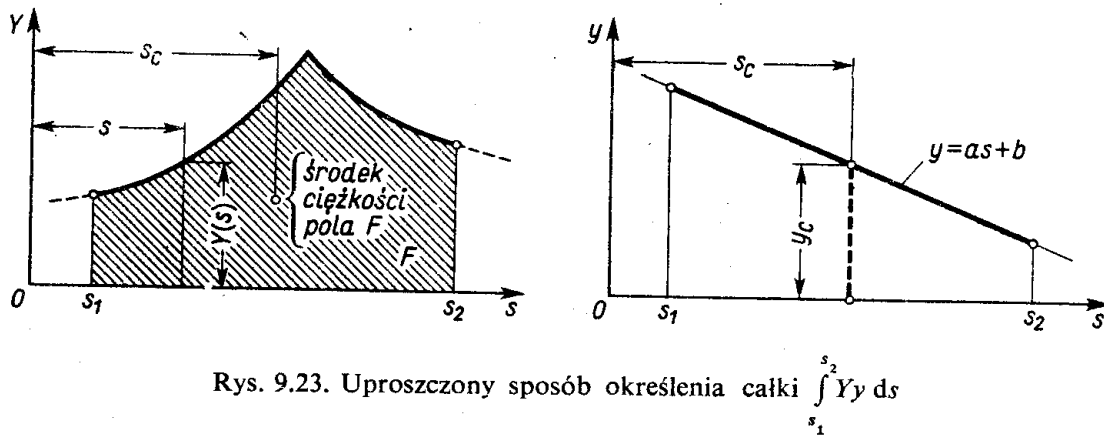
Wartości całek określonych $\int Y y ds$

Funkcja y	Funkcja Y				
	acl	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{2}a(c+d)l$	$\frac{1}{2}a(c-d)l$
	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{3}acl$	$\frac{1}{6}acl\left(1+\frac{s'}{l}\right)$	$\frac{1}{6}a(2c+d)l$	$\frac{1}{6}a(2c-d)l$
	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{6}acl$	$\frac{1}{6}acl\left(1+\frac{s}{l}\right)$	$\frac{1}{6}a(c+2d)l$	$\frac{1}{6}a(c-2d)l$
	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{6}acl\left(1+\frac{s'}{l}\right)$	$\frac{1}{3}acl$	$\frac{1}{6}al\left[c\left(1+\frac{s'}{l}\right)+d\left(1+\frac{s}{l}\right)\right]$	$\frac{1}{6}al\left[c\left(1+\frac{s'}{l}\right)-d\left(1+\frac{s}{l}\right)\right]$

	$\frac{1}{2}acl$	$\frac{1}{4}acl$	$\frac{1}{2} \frac{acl}{s'} \left(\frac{l}{2} - \frac{2s^2}{3l} \right)$	$\frac{1}{4}a(c+d)l$	$\frac{1}{4}a(c-d)l$
	$\frac{1}{2}(a+b)cl$	$\frac{1}{6}c(2a+b)l$	$\frac{1}{6}cl \left[a \left(1 + \frac{s'}{l} \right) + b \left(1 + \frac{s}{l} \right) \right]$	$\frac{1}{6}[c(2a+b) + d(2b+a)]l$	$\frac{1}{6}[c(2a+b) - d(a+2b)]l$
	$\frac{1}{2}(a-b)cl$	$\frac{1}{6}(2a-b)cl$	$\frac{1}{6}cl \left[a \left(1 + \frac{s'}{l} \right) - b \left(1 + \frac{s}{l} \right) \right]$	$\frac{1}{6}[c(2a-b) - d(2b-a)]l$	$\frac{1}{6}c[(2a-b) + d(2b-a)]l$
	0	$\frac{1}{6}acl$	$\frac{1}{3}ac \left(\frac{l}{2} - s \right)$	$\frac{1}{6}a(c-d)l$	$\frac{1}{6}a(c+d)l$

$y = as + b$ — liniową w całym przedziale s_1, s_2 . Wartość całki⁽¹⁾

$$\int_{s_1}^{s_2} Y(s) y(s) ds = F y_c \quad (9.3)$$



Rys. 9.23. Uproszczony sposób określenia całki $\int_{s_1}^{s_2} Y y ds$

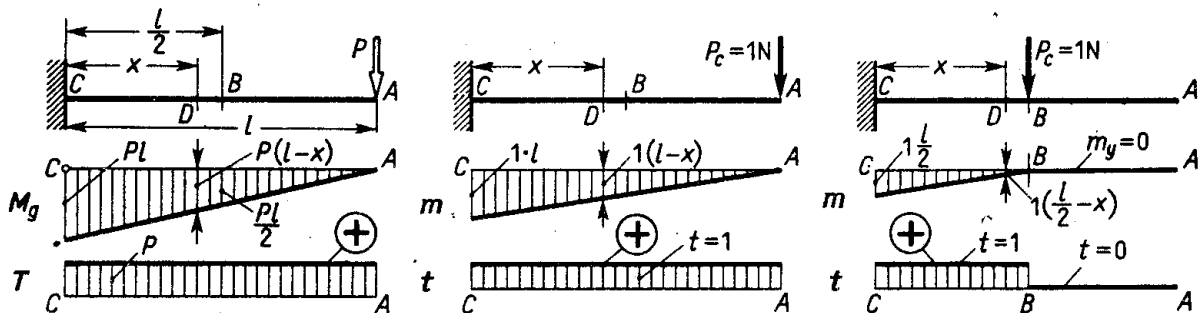
jest po prostu iloczynem pola F nieliniowej funkcji Y przez tę rzędną y_c funkcji liniowej y , która odpowiada odciętej s_c środka ciężkości pola F . Z tej tzw. reguły Wierieszczagina będziemy często korzystać. Niektóre wartości całek podane są w tabl. 9.1.

Zadania

1. Określić pionowe przemieszczenia punktów A i B pryzmatycznej belki (rys. 9.24) o przekroju kołowym wywołane siłą P .

Rozwiązanie. Pierwszy etap polega na wprowadzeniu w przekroju A jednostkowej siły pionowej $P_c = 1$ N, jako „czujnika” mierzącego szukane przesunięcie. W etapie drugim wyznaczamy składowe wysiłki przekroju D

$$M_g = P(l-x), \quad T = P, \quad N = 0 \quad \text{oraz} \quad m = (l-x) \text{ Nm/N}, \quad t = 1 \text{ N/N}, \quad n = 0,$$



Rys. 9.24. Przykład obliczenia ugięć belki

(1) Przebieg całkowania jest następujący:

$$\int_{s_1}^{s_2} Y(s) (as+b) ds = a \int_{s_1}^{s_2} Y s ds + b \int_{s_1}^{s_2} Y ds = (as_c + b) F,$$

przy czym $\int Y s ds$ jest momentem statycznym pola $F = \int Y ds$ względem osi rzędnych i wobec tego moment ten jest równy $F s_c$, gdzie s_c — odcięta środka ciężkości pola F , a z rysunku $y_c = as_c + b$.

jako funkcje x słuszne w całym przedziale $(0, l)$. W etapie trzecim funkcje te podstawiamy do (9.2) i całkujemy

$$f_A = \int_0^l \frac{P(l-x)(l-x) dx}{EJ_y} + \psi \int_0^l \frac{P \cdot 1 \cdot dx}{GA} + 0 = \frac{Pl^3}{3EJ_y} + \frac{\psi Pl}{GA},$$

przy czym wielkości M_g i m , T i t wstawiono ze znakiem plus, gdyż ich zwroty są odpowiednio zgodne. Szukane przesunięcie f_A jest sumą dwóch składników. Pierwszy jest identyczny z wynikiem (5.25), drugi reprezentuje, pominięty w rozdz. 5, wpływ siły tnącej na ugięcie belki. Ponieważ $G = E/2(1+\nu)$, a dla przekroju kołowego $J_y = \pi d^4/64$, $A = \pi d^2/4$ oraz $\psi = 32/27 = 1,185$, zatem poprzedni wynik ma postać

$$f_A = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left(1 + \frac{3\psi E J_y}{G A l^2} \right) = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left[1 + \frac{4(1+\nu)}{9} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right] = \frac{Pl^3}{3EJ_y} \left[1 + 0,58 \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right],$$

przy czym w ostatnim wyniku przyjęto $\nu = 0,3$. Widać, że wpływ siły tnącej jest rzędu $(d/l)^2$ w stosunku do jedności i gdy $l/d > 8$, wówczas wpływ ten nie przekracza 1% wartości klasycznej, tj. $Pl^3/3EJ_y$.

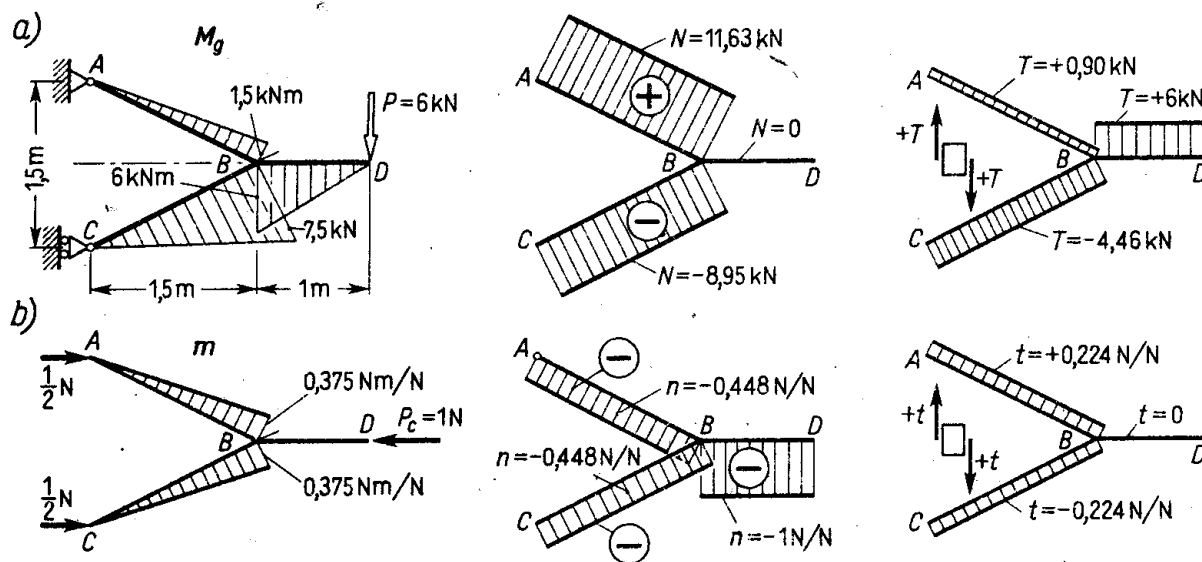
Podobnie określamy przemieszczenie punktu B wprowadzając w nim „czujnik” $P_c = 1$ N i budując wykresy m , t . Stosując regułę Wiereszczagina musimy jako funkcję y wziąć M_g i T , a jako Y funkcje m i t , gdyż te ostatnie nie są w ścisłym znaczeniu liniowe [$m(x)$ jest łamana, $t(x)$ – nieciągła]. Pole $(F)_m = 0,5(l/2)(l/2) = l^2/8$, a rzędna $(y_c)_m = 5Pl/6$, bo środek ciężkości wykresu $m(x)$ ma odcięta $x_c = l/6$. W wyniku

$$\int (M_g m/EJ_y) dx = (1/EJ_y)(l^2/8)(5Pl/6) = 5Pl^3/48EJ_y.$$

Analogicznie $\int \psi T t dx/GA = \psi Pl/2GA$, a wynik końcowy

$$f_B = (5Pl^3/48EJ_y) [1 + (32/45)(1+\nu)(d/l)^2] \approx (5Pl^3/48EJ_y) [1 + 0,93(d/l)^2]$$

ma podobny sens jak poprzednio. Dodatnie wartości f_A i f_B świadczą, że mają one kierunek zgodny z odpowiednimi „czujnikami” P_c .



Rys. 9.25. Przykład liczbowy

Dane: $J_y = 328 \text{ cm}^4$, $A = 14,2 \text{ cm}^2$, $\psi = 2,0$, $E = 2,6 G = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $l_{AB} = l_{CB} = 1,68 \text{ m}$.

2. Określić całkowite przemieszczenie punktu D ustroju I z rys. 9.9, przyjmując jednakową sztywność prętów, jak na rys. 9.25.

Rozwiązanie. Rozpoczynamy od określenia przesunięcia poziomego. W tym celu obciążamy ustrój „czujnikiem” $P_c = 1$ N (rys. 9.25b). W etapie drugim robimy jak poprzednio wykresy M_g , ..., t .

Z racji stałych sztywności całkujemy według reguły Wierieszczagina. I tak

$$\int \frac{M_g m ds}{EJ_y} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 328 \cdot 10^{-8}} \left[\underbrace{\left(\frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,68}{2} \right)}_{\text{pole}} \underbrace{\left(\frac{2}{3} \cdot 0,375 \right)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{\left(\frac{7,5 \cdot 10^3 \cdot 1,68}{2} \right)}_{\text{pole}} \underbrace{\left(\frac{2}{3} \cdot 0,375 \right)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{0}_{\text{pręt BD}} \right],$$

skąd mamy wartość $2,88 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,88 \text{ mm}$. Podobnie

$$\int \frac{Nn ds}{EA} = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 14,2 \cdot 10^{-4}} \left[\underbrace{\left(11,63 \cdot 10^3 \cdot 1,68 \right)}_{\text{pręt AB}} \underbrace{(-0,448)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{\left(-8,95 \cdot 10^3 \cdot 1,68 \right)}_{\text{pręt CB}} \underbrace{(-0,448)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{0}_{\text{pręt BD}} \right],$$

$$\int \frac{\psi Tt ds}{GA} = \frac{2,0}{7,7 \cdot 10^{10} \cdot 14,2 \cdot 10^{-4}} \left[\underbrace{\left(900 \cdot 1,68 \right)}_{\text{pręt AB}} \underbrace{(0,224)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{\left(-4460 \cdot 1,08 \right)}_{\text{pręt CB}} \underbrace{(-0,224)}_{\text{rzędna}} + \underbrace{0}_{\text{pręt BD}} \right],$$

skąd odpowiednio mamy $-0,01 \text{ mm}$ i $0,04 \text{ mm}$. Poziome przesunięcie jest $2,88 - 0,01 + 0,04 = 2,91 \text{ mm} > 0$, a więc zgodne jest z siłą P_c .

Przy określaniu pionowego przesunięcia punktu D obciążamy ten punkt pionową siłą P_c (I etap). Wykresy M_g , N i T zostają te same, wykresy m , n i t mają postać jak M_g , ..., a rzędne zmniejszone w stosunku $P_c/P = 1/6 \cdot 10^3$. Wykorzystując to oraz biorąc dane z tabl. 9.1 mamy

$$\int \frac{M_g m ds}{EJ_y} = \frac{1}{656 \cdot 10^3} \left(\underbrace{\frac{1}{3} 1500 \cdot 0,25 \cdot 1,68}_{\text{pręt AB}} + \underbrace{\frac{1}{3} 7500 \cdot 1,25 \cdot 1,68}_{\text{pręt CB}} + \underbrace{\frac{1}{3} 6000 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{pręt BD}} \right) = 11,37 \text{ mm}$$

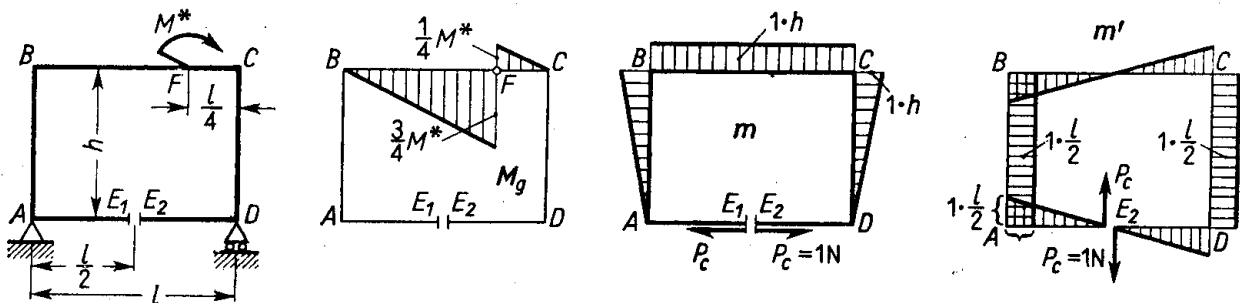
i podobnie dwa pozostałe składniki $0,21$ i $0,11 \text{ mm}$. Pionowe przesunięcie $11,37 + 0,21 + 0,11 = 11,69 \text{ mm} > 0$ ma kierunek do dołu. Całkowite przemieszczenie punktu D jest sumą geometryczną obydwóch przemieszczeń składowych i wynosi

$$f_D = \sqrt{(11,69)^2 + (2,91)^2} = 12,08 \text{ mm}.$$

Z obydwóch zadań wynika, że w porównaniu z momentami gnącymi wpływ sił tnących i wzdłużnych na przemieszczenia jest pomijalny, a więc

przemieszczenia w ustroju z prętów smukłych przy jednoczesnym ich zginaniu, ścinaniu i rozciąganiu są z techniczną dokładnością równe pierwszemu tylko składnikowi wzoru (9.2), czyli

$$f \approx \int \frac{M_g m ds}{EJ_y}. \quad (9.4)$$



Rys. 9.26. Określenie przemieszczeń względnych

3. Określić z techniczną dokładnością pionowe i poziome rozsunięcie się przekrojów E_1 , E_2 ramy (rys. 9.26). $EJ_y = \text{const}$.

- Rozwiązanie. Poziome przesunięcie przekroju E_2 „mierzy” przyłożona w nim pozioma siła $P_c = 1 \text{ N}$ skierowana na prawo. Przyłożona w przekroju E_1 siła $P_c = 1 \text{ N}$ „mierzy” przesunięcie jego

na lewo. Rozsuniecie się poziome E_1 i E_2 jest sumą tych składników, a więc „czujnikiem” jest jednocześnie obciążenie przekrojów dwiema przeciwnymi siłami P_c .

W etapie drugim robimy wykresy M_g i m , jak podają rysunki, a następnie (etap III) obliczamy z wzoru (9.4) i (9.3)

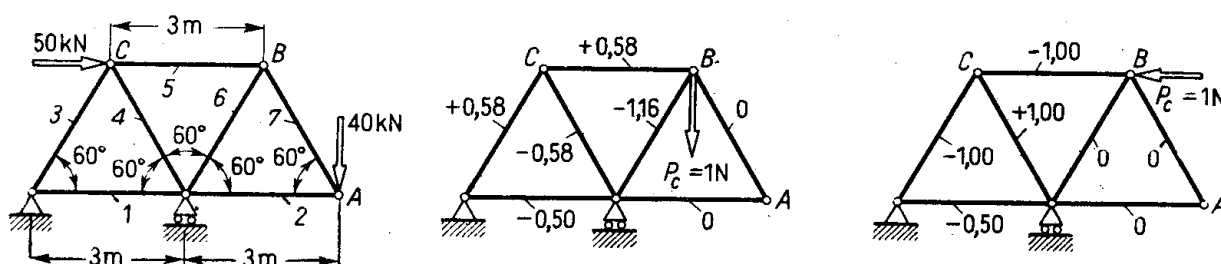
$$f_{\text{poz}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{3M^*}{4} \frac{3l}{4} - \frac{1}{2} \frac{M^*}{4} \frac{l}{4} \right)}_{\text{pole } F_M \text{ w pręcie } BC} \underbrace{(-h)}_{\text{rzędna } y_c} \frac{1}{EJ_y} = -\frac{M^* l h}{4EJ_y}$$

Ujemna wartość wyniku oznacza, że praca sił P_c jest ujemna, a więc przekroje E_1 i E_2 nie rozsuwają się, lecz schodzą się.

Rozumując podobnie określimy pionowe rozsuniecie się E_1 i E_2 , gdy „czujnikiem” jest układ dwu sił pionowych $P_c = 1$ N. Po zrobieniu wykresu m' i wykorzystaniu tabl. 9.1 otrzymujemy

$$f_{\text{pion}} = \frac{1}{EJ_y} \left[\underbrace{\frac{1}{6} \frac{3}{4} M^* \left(\frac{l}{2} - 2 \frac{l}{4} \right) \frac{3l}{4}}_{\text{odcinek } BF} + \underbrace{\frac{1}{6} \frac{M^*}{4} \left(2 \frac{l}{4} + \frac{l}{2} \right) \frac{l}{4}}_{\text{odcinek } FC} \right] = \frac{M^* l^2}{96EJ_y}$$

Wynik $f_{\text{pion}} > 0$ oznacza przesunięcie E_1 względem E_2 do góry.



Rys. 9.27. Do zadania 4; $A_4 = 20 \text{ cm}^2$, dla reszty prętów $A = 10 \text{ cm}^2$

4. Obliczyć wypadkowe przemieszczenie węzła B stalowej kratownicy obciążonej siłami 50 kN i 40 kN (rys. 9.27). $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. W kratownicy pręty są tylko rozciągane lub ściskane, wobec czego z wzoru (9.2) zostaje tylko ostatni składnik. Ponadto w pręcie i -tym $N_i = \text{const}$, $n_i = \text{const}$ oraz $A_i = \text{const}$ i wtedy

$$\int N_i n_i ds / EA_i = N_i n_i l_i / EA_i,$$

gdzie l_i – długość i -tego pręta. Wartość wyrażenia (9.2) jest sumą takich składników dla wszystkich k prętów kratownicy, skąd

$$f = \sum_1^k \frac{N_i n_i l_i}{EA_i}. \quad (9.5)$$

Całość obliczeń ujmujemy w poniższej tabelicy. Pierwsze trzy kolumny to numeracja i dane geometryczne prętów. Kolumny 4 i 5 podają siły N_i odpowiadające rzeczywistemu obciążeniu i wywołane tym wydłużenia $\Delta l_i = N_i l_i / EA_i$. Kolumna 6 to siły n'_i (N/N) dla „czujnika”, tj. pionowej siły $P_c = 1$ N przyłożonej w węzle B . Wreszcie w kolumnie 7 mamy iloczyny $n'_i \Delta l_i$, których suma to szukane pionowe przesunięcie węzła B . Dodatnia wartość świadczy, że przesunięcie to zachodzi do dołu.

Obciążając podobnie węzeł B poziomą siłą $P_c = 1$ N obliczamy odpowiednie n'_i oraz $n''_i \Delta l_i$ i w wyniku (suma kolumny 9) mamy poziome przesunięcie węzła B zachodzące na prawo. Wypadkowe przemieszczenie jest geometryczną sumą składowych i wynosi

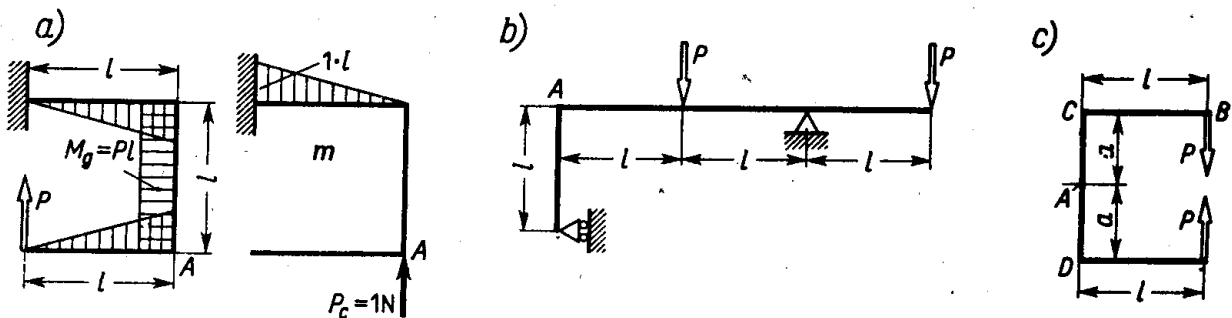
$$f_B = \sqrt{(2,43)^2 + (-2,87)^2} = 3,76 \text{ mm}.$$

Pręt nr	l_i m	A_i cm ²	N_i kN	$\frac{N_i l_i}{EA_i}$ mm	n'_i N/N	$n'_i \Delta l_i$ mm	n''_i N/N	$n''_i \Delta l_i$ mm	
1	3,0	10	+1,9	+0,03	-0,50	-0,02	-0,50	-0,02	
2	3,0	10	-23,1	-0,35	0	0	0	0	
3	3,0	10	+96,2	+1,44	+0,58	0,83	-1,00	-1,44	
4	3,0	20	-96,2	-0,72	-0,58	0,42	1,00	-0,72	
5	3,0	10	+46,2	+0,69	+0,58	0,40	-1,00	-0,69	
6	3,0	10	-46,2	-0,69	-1,16	0,80	0	0	
7	3,0	10	+46,2	+0,69	0	0	0	0	
					$\sum n'_i \Delta l_i =$ = 2,43 mm		$\sum n''_i \Delta l_i =$ = -2,87 mm		

5. Jak zmieni się wynik zadania 4, gdy obciążenie zwiększymy m razy, a pola przekrojów zwiększymy n razy?

Odp. Zmieni się w stosunku (m/n) razy.

6. Nie obliczając szczegółowo określić jak (do góry, na lewo itp.) przesuną się punkty A podanych ustrojów (rys. 9.28)?



Rys. 9.28.

Odp. a. Do dołu, gdyż M_g i m mają przeciwne znaki i przesunięcie f odpowiadające pionowej sile P_c jest ujemne; podobnie obciążając punkt A poziomą $P_c = 1$ N skierowaną na lewo mamy wszędzie jednakowe znaki M_g i m , a więc punkt A przesunie się na lewo.

b. Do góry, poziomo nie przesunie się.

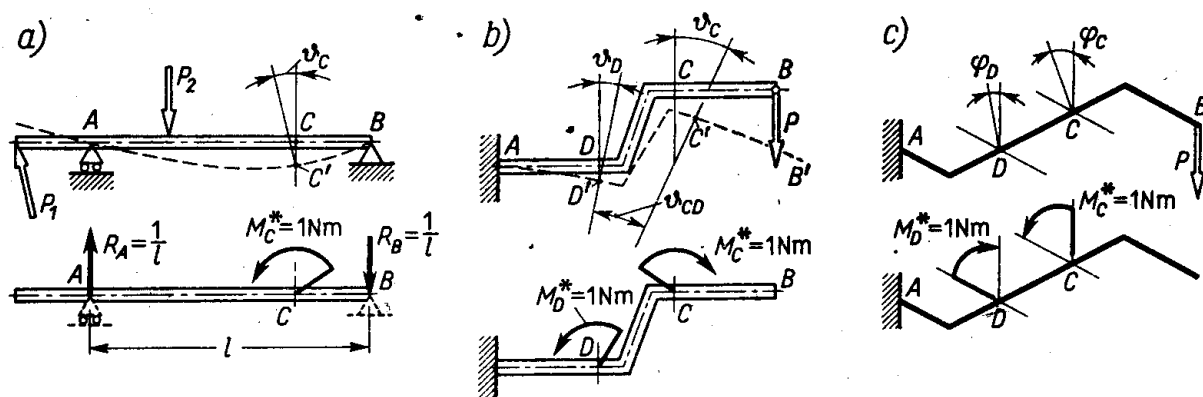
c. Pytanie jest bez sensu, dopóki nie unieruchomi się ustroju jako ciała sztywnego. Zależnie od unieruchomienia punkt A ma różne przemieszczenia. Gdy utwierdzić przekrój B , punkt A przesunie się do dołu i na prawo (patrz rys. 9.28a), gdy w narożu C jest podpora przegubowa nieprzesuwana, a w D przegubowa dająca swobodę pionowego przesuwu, wówczas przesunięcie A jest na lewo bez składowej pionowej (o ile pominać wpływ sił N) itd.

9.4. Wyznaczanie przemieszczeń (c.d.): uogólnienie wyników

Metodą Maxwella-Mohra (w skrócie M-M) można wyznaczać nie tylko przesunięcia punktów ustroju, lecz i inne wielkości, jak kąt obrotu przekroju względem podłoża, względne przemieszczenie kątowe lub liniowe dwóch różnych przekrojów itp. Warunkiem

tego uogólnienia jest wprowadzenie zamiast siły P_c innych jednostkowych obciążeń. Pamiętając, że metoda M–M opiera się na zasadzie prac przygotowanych, jako kryterium doboru tych nowych obciążeń przyjmujemy też pojęcie pracy. I tak, jeśli α oznacza szukane przemieszczenie, to odpowiadający jemu jednostkowy układ obciążenia $I_1 = 1$ jest ten, którego praca przygotowana na tym przemieszczeniu jest

$$L_1 = I_1 \alpha = 1 \cdot \alpha \quad \text{Nm.} \quad (9.6)$$



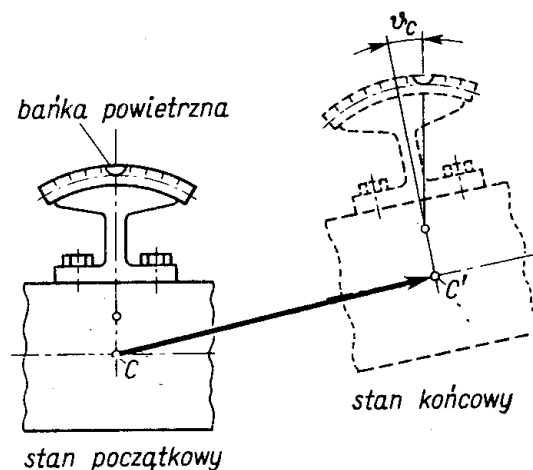
Rys. 9.29. Przykłady określenia jednostkowych uogólnionych sił odpowiadających zadanym uogólnionym współrzędnym

Ponieważ w tej definicji α może oznaczać różne rodzaje wielkości (kąt obrotu, przesunięcie itp.), nazywamy α *uogólnionym przemieszczeniem* lub *uogólnioną współrzędną*. Obciążenie I związane z α zależnością (9.6) jest *uogólnioną siłą współrzędną α* . Wartość $I_1 = 1$ nazywamy *jednostkową uogólnioną siłą współrzędną α* .

Dla przykładu: uogólnioną siłą odpowiadającą kątowi ϑ_C (rys. 9.29a), tj. obrotu przekroju C względem podłoża, jest obciążenie złożone z momentu $M_C^* = 1 \text{ N m}$ i reakcji $R_A = R_B = 1/l$, gdyż jego praca $L = M_C^* \vartheta_C = 1 \cdot \vartheta_C$ spełnia kryterium (9.6). Podobnie kątowi ϑ_{CD} względnego obrotu przekrojów C i D (rys. 9.29b) odpowiada uogólniona siła w postaci dwóch przeciwnych momentów $M_C^* = M_D^* = 1 \text{ N m}$ przyłożonych w tych przekrojach. Zauważając bowiem, że $\vartheta_{CD} = \vartheta_C - \vartheta_D$, mamy spełnienie warunku (9.6)

$$L = M_C^* \vartheta_C - M_D^* \vartheta_D = 1 \cdot (\vartheta_C - \vartheta_D) = 1 \cdot \vartheta_{CD}.$$

W zastosowaniu do badania przemieszczeń pojęcie uogólnionej siły można przyrównać do czujnika reagującego tylko na dany rodzaj przemieszczenia. Dla przykładu: w poziomnicy (rys. 9.30) bańka powietrza reaguje tylko na obrót o kąt ϑ_C , a nie reaguje zupełnie na przesunięcie CC' . Nie wpływa to jednak na postępowanie, które zostaje jak podano w art. 9.3. I tak, chcąc znaleźć kąt obrotu naroża C w ustroju (rys. 9.20a) obciążamy to



Rys. 9.30. Analogia mechaniczna do jednostkowego obciążenia momentem w punkcie C

naroże jednostkowym momentem $M_C^* = 1 \text{ N m}$. Odpowiadające temu wielkości m, t, n są oczywiście inne, niż gdy „czujnikiem” była siła P_c (rys. 9.20b). Dalsze jednak etapy, jak badanie wpływu deformacji jednego elementu EF , obliczenie pracy (wzór a z art. 9.3), zostają bez zmiany, z tym że praca jednostkowego obciążenia jest teraz

$$M_C^* d\vartheta_C = 1 d\vartheta_C, \quad (\text{a})$$

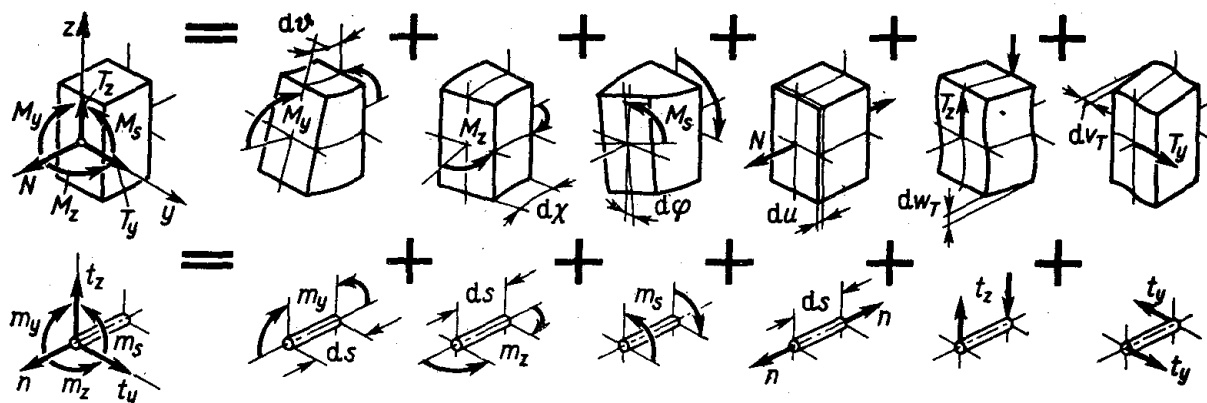
gdzie $d\vartheta_C$ — kąt obrotu naroża C odpowiadający deformacji elementu EF . Po dalszych przekształceniach otrzymujemy wynik

$$\vartheta_C = \int \frac{M_\theta m ds}{EJ_y} + \int \frac{\psi T t ds}{GA} + \int \frac{N n ds}{EA}, \quad (\text{b})$$

będący kopią wzoru (9.2), z tym że wielkości $m \text{ N m/N m}$, $t \text{ N/N m}$, $n \text{ N/N m}$ odniesione są teraz do innej jednostki uogólnionego obciążenia, tj. $M_C^* = 1 \text{ N m}$. Tę samą zgodność otrzymamy i dla innych sił uogólnionych, z tym że lewa „strona wzoru (9.2) jest odpowiednią dla danej siły uogólnioną współrzędną, a wielkości m, t, n w prawej stronie wzoru mają każdorazowo miana

$$m \left(\frac{\text{Nm}}{\text{miano siły uogólnionej}} \right), \quad t \left(\frac{\text{N}}{\text{miano siły uogólnionej}} \right), \quad n \left(\frac{\text{N}}{\text{miano siły uogólnionej}} \right).$$

W świetle tych uogólnień podstawową zależność (9.1) i wynikający z niej wzór (9.2) ujmujemy, jak następuje: *szukana uogólniona współrzędna jest równa liczbowo pracy składowych wysiłku wywołanych uogólnioną dla tej współrzędnej siłą jednostkową na odkształceniach wywołanych rzeczywistym obciążeniem.*



Rys. 9.31. Określenie pracy poszczególnych składowych wysiłku wywołanych uogólnioną siłą jednostkową, na przemieszczeniach wywołanych obciążeniem rzeczywistym

Wykorzystując tę regułę rozszerzymy metodę M–M na ustroje przestrzenne. Jeśli bowiem w elemencie takiego ustroju (rys. 9.31) rzeczywiste obciążenie wywołuje odkształcenia $d\vartheta, dx, d\varphi, du, dw_T, dv_T$, a odpowiednia jednostkowa uogólniona siła daje składowe wysiłki m_y, m_z, m_s, n, t_z i t_y , to elementarna praca obliczona według powyższej reguły jest

$$m_y d\vartheta + m_z dx + m_s d\varphi + n du + t_z dw_T + t_y dv_T,$$

a szukane przemieszczenie f jest sumą tych prac, czyli

$$f = \int (m_y d\vartheta + m_z d\chi + m_s d\varphi + n du + t_z dw_T + t_y dv_T). \quad (9.7)$$

Dla ustroju sprężystego odkształcenia $d\vartheta, \dots, dv_T$ są związane ze składowymi M_y, \dots, T_y wysiłku wywołanego rzeczywistym obciążeniem następującymi znanymi już zależnościami:

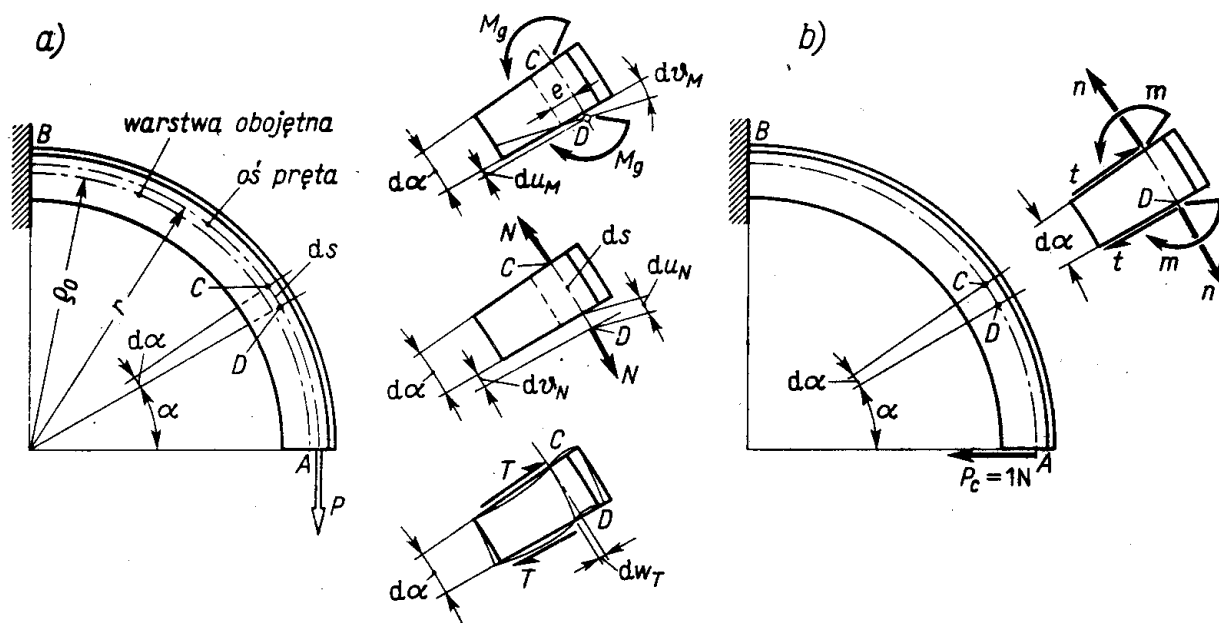
$$\begin{aligned} d\vartheta &= \frac{M_y ds}{EJ_y}, & d\chi &= \frac{M_z ds}{EJ_z}, & d\varphi &= \frac{M_s ds}{C}, \\ du &= \frac{N ds}{EA}, & dw_T &= \frac{\psi_z T_z ds}{GA}, & dv_T &= \frac{\psi_y T_y ds}{GA}, \end{aligned}$$

gdzie J_y, J_z — główne centralne momenty bezwładności przekroju, C — sztywność na skręcanie, A — pole przekroju. Po podstawieniu tych zależności do (9.7) mamy

$$f = \int \left(\frac{M_y m_y}{EJ_y} + \frac{M_z m_z}{EJ_z} + \frac{M_s m_s}{C} + \frac{N n}{EA} + \frac{\psi_z T_z t_z}{GA} + \frac{\psi_y T_y t_y}{GA} \right) ds \quad (9.8)$$

jako uogólnienie wzoru (9.2). Z licznych rachunków okazuje się, że podobnie jak w ustrojach płaskich, trzy ostatnie składniki wzoru (9.9) są pomijalne w porównaniu z trzema pierwszymi i dlatego w większości zagadnień przyjmujemy przybliżenie

$$f \approx \int \left(\frac{M_y m_y}{EJ_y} + \frac{M_z m_z}{EJ_z} + \frac{M_s m_s}{C} \right) ds, \quad (9.9)$$



Rys. 9.32. Wyznaczenie przemieszczeń w pręcie silnie zakrzywionym

pod warunkiem, że te momenty nie są tożsamościowo równe zero. Jeśli, jak w kratownicach, jedynymi składowymi wysiłku są siły N , to człon Nn/EA nie wolno zaniedbać, gdyż oznaczałoby to fizyczny nonsens, tj. nieodkształcalność ustroju.

Te same wzory (9.8) bądź (9.9) stosujemy dla prętów słabo zakrzywionych, w których rozkład naprężeń z techniczną dokładnością jest jak w prętach prostych (patrz art. 6.6).

Dla prętów *silnie zakrzywionych* (rys. 9.32a) przy określeniu odkształceń elementu CD należy uwzględnić, że warstwa obojętna jest przesunięta o odcinek e do środka krzywizny. Siły N wywołują tu nie tylko wydłużenie $du_N = N ds/EA$, lecz i obrót przekrojów C i D o kąt $d\vartheta_N = du_N/r$, gdyż naprężenia $\sigma_x = N/A$ powodują różne wydłużenia włókien z racji ich różnej długości. Podobnie moment M_θ wywołuje obrót przekrojów C i D o kąt⁽¹⁾

$$d\vartheta_M = (ds/r) [(\varrho_0/\varrho'_0) - 1]$$

oraz wydłużenie $du_M = e d\vartheta_M$. Ponieważ z art. 6.6 wiemy, że $(\varrho_0/\varrho'_0) - 1 = M_\theta/EAe$, w wyniku całkowite odkształcenia du i $d\vartheta$ są

$$du = du_N + du_M = \frac{N ds}{EA} + \frac{M_\theta ds}{EAe}, \quad d\vartheta = d\vartheta_M + d\vartheta_N = \frac{M_\theta ds}{EAer} + \frac{N ds}{EAer}. \quad (c)$$

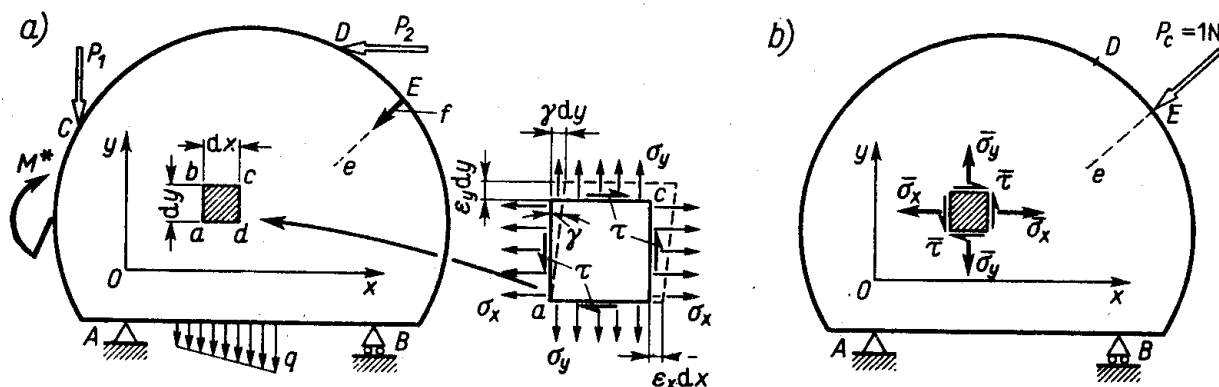
Na koniec, z uwagi na małą jego wartość, przyjmujemy przesunięcie $dw_T = \psi T ds/GA$, jak dla prętów prostych.

Dalsze etapy postępowania są podobne do już opisanych. I tak, dla wyznaczenia poziomego przesunięcia punktu A obciążamy go „czujnikiem” $P_c = 1 \text{ N}$ (rys. 9.32b), określamy wielkości m , n , t i obliczamy ich pracę na odkształceniach $d\vartheta$, du , dw_T otrzymując poszukiwane przesunięcie f jako

$$f = \int \frac{(M_\theta + Ne) m ds}{EAer} + \int \left(N + \frac{M_\theta}{r} \right) \frac{n ds}{EA} + \int \frac{\psi T t}{GA} ds, \quad (9.10)$$

gdzie całkowanie obejmuje całą długość pręta.

Jako ostatni przykład zastosowania metody M-M rozpatrzmy tarczę sprężystą o grubości δ (rys. 9.33a), w której dane obciążenie P_1, P_2, \dots, M^* wywołuje naprężenia σ_x, σ_y i τ . Chcąc znaleźć towarzyszące temu obciążeniu przesunięcie punktu E w kierunku Ee wykonamy czynność pomocniczą polegającą na przyłożeniu „czujnika” $P_c = 1 \text{ N}$ (rys. 9.33b), w wyniku czego powstają w tarczy naprężenia⁽²⁾



Rys. 9.33. Zastosowanie zasady prac przygotowanych dla ustroju dwuwymiarowego

$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}$. Przyjmijmy przy tym, że wszystkie te naprężenia, tj. $\sigma_x, \dots, \bar{\tau}$, będące na ogół funkcjami x i y , są znane, a więc znane są też odkształcenia

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E, \quad \varepsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E, \quad \gamma = \tau/G \quad (d)$$

każdej elementarnej kostki (art. 7.5). Obliczmy teraz pracę elementarnych sił $\bar{\sigma}_x dy \delta$, $\bar{\sigma}_y dx \delta$ i $\bar{\tau} dx \delta$ oraz $\bar{\tau} dy \delta$ wywołanych „czujnikiem” P_c na odpowiednich przesunięciach $\varepsilon_x dx$, $\varepsilon_y dy$ i γdy odpowiadających rzeczywistemu obciążeniu. Widać od razu, że praca sił $\bar{\sigma}_x dy \delta$ jest

$$\bar{\sigma}_x dy \delta \cdot \varepsilon_x dx = \bar{\sigma}_x \varepsilon_x \delta dx dy$$

⁽¹⁾ Symbole ϱ_0 i ϱ'_0 oznaczają promienie krzywizny warstwy obojętnej przed i po odkształceniu (rys. 6.28).

⁽²⁾ Ich miara odniesione do jednostki P_c są N/m^2 $\text{N} = 1/\text{m}^2$.

i podobnie praca sił $\bar{\sigma}_y \delta dx$ jest $\bar{\sigma}_y \epsilon_y \delta dx dy$. Z czterech sił stycznych pracę $\bar{\tau} \gamma \delta dx dy$ wykonuje tylko siła $\bar{\tau} dx \delta$ działająca na przesunięciu γdy boku bc , gdyż bok ad przyjęto nieruchomy, a przesunięcia pozostałych są prostopadłe do odpowiednich sił stycznych. W wyniku mamy całkowitą elementarną pracę

$$dL = (\bar{\sigma}_x \epsilon_x + \bar{\sigma}_y \epsilon_y + \bar{\tau} \gamma) \delta dx dy. \quad (e)$$

Sumując prace dL dla wszystkich kostek składających się na tarczę i uwzględniając przy tym zależności (d) otrzymamy, zgodnie z ogólną regułą, szukane przesunięcie f jako

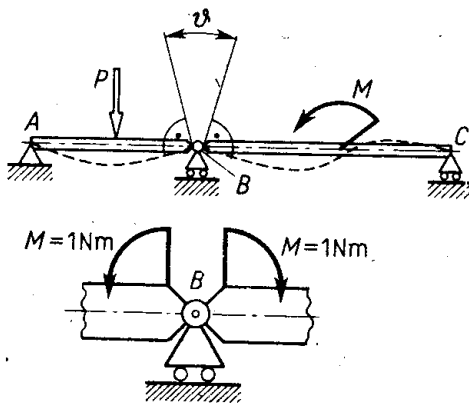
$$f = \iint_F \left[\frac{1}{E} (\sigma_x \bar{\sigma}_x - \nu \sigma_x \bar{\sigma}_y - \nu \bar{\sigma}_x \sigma_y + \sigma_y \bar{\sigma}_y) + \frac{\tau \bar{\tau}}{G} \right] \delta dx dy, \quad (9.11)$$

gdzie całkowanie obejmuje całe pole F tarczy.

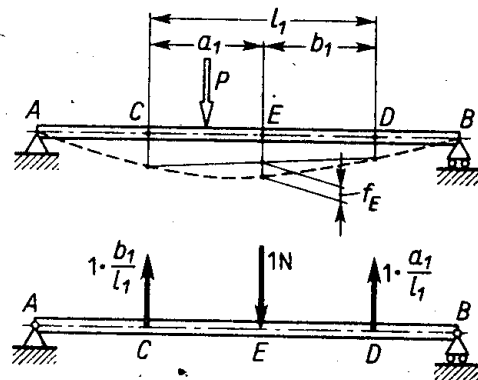
Zadania

1. Określić uogólnioną siłę I_1 „mierzącą” kąt ϑ względnego obrotu belek AB i BC połączonych przegubem na podporze B (rys. 9.34).

Odp. Dwa przeciwne momenty $M = 1 \text{ Nm}$, z których jeden obciąża belkę AB , drugi belkę BC .



Rys. 9.34.



Rys. 9.35.

2. W belce AB (rys. 9.35) chcemy znaleźć pionowe przesunięcie f_E punktu E względem prostej przechodzącej przez punkty C i D . Jaka jest uogólniona siła I_1 dla tego przesunięcia?

Odp. Oznaczmy f_C^* , f_D^* , f_E^* pionowe przesunięcia punktów C , D i E w nieruchomym układzie odniesienia. Z rysunku

$$f_E = f_E^* - (f_C^* b_1/l_1) - (f_D^* a_1/l_1)$$

i po wstawieniu do (9.6) otrzymujemy

$$I_1 \alpha = 1 \cdot f_E = 1 \cdot f_E^* - (1 \cdot b_1/l_1) f_C^* - (1 \cdot a_1/l_1) f_D^*.$$

Tak więc szukana uogólniona siła składa się z trzech sił: jednostkowej w E skierowanej do dołu (praca dodatnia) i sił $(1 \cdot b_1/l_1)$, $(1 \cdot a_1/l_1)$ przyłożonych odpowiednio w C i D skierowanych do góry (praca ujemna). Widać, że te siły są w równowadze.

3. Obliczyć kąt względnego obrotu przekrojów A i B w belce (rys. 9.24).

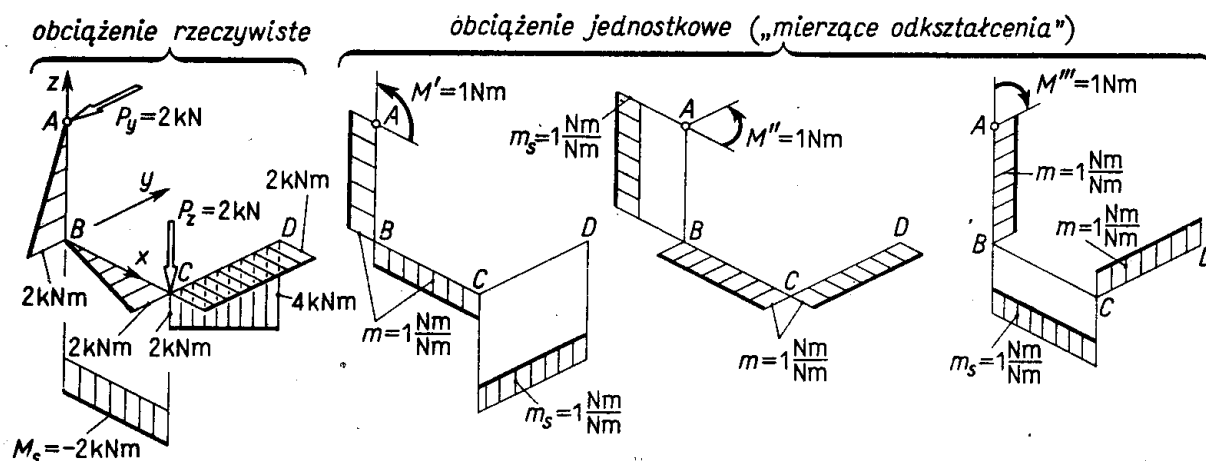
Odp. Uogólniona siła jak na rys. 9.29b; $\vartheta_{AB} = Pl^2/8EJ_y$.

4. Wyznaczyć kąty obrotu w płaszczyznach xy , yz i zx przekroju A konstrukcji (rys. 9.16), jeśli $P_x = 0$, $P_y = P_z = -2 \text{ kN}$, $a = b = c = 1 \text{ m}$, a pręty wykonano z rury ($D_z = 10 \text{ cm}$, $D_w = 9 \text{ cm}$, $E = 2,56 G = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$).

Rozwiązanie. Wykorzystując wyniki z rys. 9.16 ustalamy najpierw przebieg momentów gnących i skręcających dla obciążenia rzeczywistego (rys. 9.36), przy czym rzędne M_g odkładamy w płaszczyznach ich działania po stronie włókien ściskanych, a znak M_s ustalamy jak na rys. 3.5. Ponadto obliczamy sztywności

$$EJ_y = EJ_z = \pi (D_z^4 - D_w^4) E / 64 = 3,48 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2, \quad C = GJ_0 = 2,64 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2,$$

jednakowe dla wszystkich prętów.



Rys. 9.36. Przykład określenia kątów obrotu przekroju A w konstrukcji z rys. 9.16

„Czujnikami” mierzącymi szukane kąty są jednostkowe momenty M' , M'' , M''' , którymi kolejno obciążamy przekrój A i dla których oddzielnie określamy przebieg momentów gnących i skręcających, jak podaje rysunek. Stosując teraz wzór (9.9) i uwzględniając, że sztywności są stałe, widzimy, że obliczenie sprowadza się do określenia całek z iloczynów rzędnych odpowiadających sobie wykresów. Wynika stąd bez żadnych rachunków, że

$$(\vartheta_A)_{xz} = 0,$$

gdyż w żadnym z prętów odpowiadające sobie wykresy M_g i m bądź M_s i m_s nie są jednocześnie różne od zera. Dla przykładu, w pręcie BC M_g działa w płaszczyźnie xy , a wywołany przez $M' = 1 \text{ Nm}$ moment m jest w płaszczyźnie xz i odpowiednie składniki wzoru (9.9) są równe zero. Podobnie mamy tu $M_s \neq 0$, ale $m_s = 0$.

Przy określeniu pozostałych kątów stosujemy skrócony sposób całkowania według wzoru (9.3). I tak

$$(\vartheta_A)_{xy} = \left[\underbrace{\left(\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1}{2} \right)}_{\text{pole}} \cdot \underbrace{1}_{\text{rzędna}} + \underbrace{2 \cdot 10^3 \cdot 1}_{\text{pole}} \cdot \underbrace{1}_{\text{rzędna}} \right] \frac{1}{3,48 \cdot 10^5} = 0,86 \cdot 10^{-2} \text{ rad},$$

$$(\vartheta_A)_{yz} = \underbrace{\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1}{2} (-1)}_{\text{pręt } AB} \frac{1}{3,48 \cdot 10^5} + \underbrace{(-2 \cdot 10^3 \cdot 1) \cdot 1}_{\text{pręt } BC} \frac{1}{2,64 \cdot 10^5} + \underbrace{\left(\frac{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3}{2} \cdot 1 \right) (-1)}_{\text{pręt } CD} \frac{1}{3,48 \cdot 10^5},$$

skąd $(\vartheta_A)_{yz} = -1,91 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$. Dodatnia wartość $(\vartheta_A)_{xy}$ świadczy, że obrót w tej płaszczyźnie jest zgodny ze zwrotem M'' , natomiast kąt $(\vartheta_A)_{yz}$ jest ujemny, a więc ma zwrot przeciwny niż M''' .

5. W rozwiązaniu zadania 4 zastosowano uproszczony wzór (9.9). Czy zastosowanie pełnego wzoru (9.5) zmieni wynik?

Odp. Nie, albowiem przy działaniu M' , M'' i M''' siły $n \equiv 0$ i $t \equiv 0$.

6. Wyznaczyć poziome i pionowe przesunięcia przekroju A pręta (rys. 9.32a) przyjmując, że jest on słabo zakrzywiony.

Odp. Dla rzeczywistego obciążenia siłą P w przekroju D mamy

$$M_g = Pr(1 - \cos \alpha), \quad N = P \cos \alpha, \quad T = P \sin \alpha,$$

a przy obciążeniu siłą $P_c = 1$ N, jak na rys. 9.32b,

$$m = r \sin \alpha \text{ Nm/N}, \quad n = -\sin \alpha \text{ N/N}, \quad t = \cos \alpha \text{ N/N}.$$

Ponieważ pręt jest słabo zakrzywiony, stosujemy wzór (9.9), z którego zostaje tylko pierwszy składnik, przy czym $ds = r d\alpha$ i

$$f_{\text{poziome}} \approx \int_0^{\pi/2} \frac{M_g m r d\alpha}{EJ_y} = \frac{Pr^3}{EJ_y} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha = \frac{Pr^3}{2EJ_y}.$$

Przykładając pionową siłę $P_c = 1$ N o zwrocie jak siła P mamy

$$m = r(1 - \cos \alpha) \text{ Nm/N}, \quad n = \cos \alpha \text{ N/N}, \quad t = \sin \alpha \text{ N/N},$$

i z wzoru (9.9) poszukiwane pionowe przesunięcie

$$f_{\text{pionowe}} \approx \int_0^{\pi/2} \frac{Pr^2(1 - \cos \alpha)^2 r d\alpha}{EJ_y} = \frac{Pr^3}{EJ_y} \frac{3\pi - 8}{4} \approx 0,356 \frac{Pr^3}{EJ_y}.$$

Tak więc przekrój A przesuwa się na lewo i do dołu

7. Wyznaczyć kąt obrotu ϑ_A przekroju A pręta (rys. 9.32a).

Odp. $\vartheta_A = (Pr^2/2EJ_y)(\pi - 2)$, zwrot współzegarowy.

8. Z badać wpływ sił wzdłużnych i tnących oraz wpływ krzywizny na wyniki zadania 6, jeśli $r = 50$ cm, $J_y = 179$ cm⁴, $A = 21$ cm², $E/G = 2,6$, $\psi = 1,6$.

Odp. Z wzoru (6.22) $e = J_y/Ar = 0,111$ cm i wzoru (9.10) mamy

$$f_{\text{poziome}} = \frac{Pr^3}{2EJ_y} \left[1 + \frac{e}{r} \left(2\psi \frac{E}{G} - 1 \right) \right] = \frac{Pr^3}{2EJ_y} \cdot 1,016,$$

$$f_{\text{pionowe}} = \frac{3\pi - 8}{4} \frac{Pr^3}{EJ_y} \left[1 + \frac{e}{(3\pi - 8)r} \left(8 - \pi + \frac{\pi\psi E}{G} \right) \right] = \frac{3\pi - 8}{4} \frac{Pr^3}{EJ_y} \cdot 1,028.$$

Tak więc wpływy te są $\sim 1,5\%$ i $\sim 3\%$ wartości poprzednich.

9. Obliczyć pionowe przesunięcie punktu A pierścienia (rys. 9.17) przyjmując, że wymiary przekroju są małe w stosunku do r .

Odp. Przebieg M_g i M_s jest już znany (patrz wzory b i c art. 9.2). Z tychże wzorów dla $P_c = 1$ N przyłożonej w A mamy

$$m = r \sin \alpha \text{ Nm/N}, \quad m_s = -r(1 - \cos \alpha) \text{ Nm/N}$$

i z wzoru (9.9), przy wprowadzeniu $ds = r d\alpha$, otrzymujemy po wykonaniu całkowania w granicach $\alpha(0; 3\pi/2)$

$$f_A = \frac{Pr^3}{4EJ_y} \left[3\pi + \frac{EJ_y}{C} (9\pi + 8) \right] - \frac{qr^4}{8EJ_y} \left[4 + \frac{EJ_y}{C} (9\pi^2 + 12\pi + 4) \right],$$

gdzie EJ_y – sztywność na zginanie względem głównej osi y leżącej w płaszczyźnie pierścienia, $C =$ sztywność na skręcanie.

10. Dowieść, że w obciążonym przestrzennie ustroju płaskim, jak na rys. 9.14, 9.17, nie ma żadnych przemieszczeń w jego płaszczyźnie, jeśli w niej leżą główne centralne osie przekrojów wszystkich prętów.

Odp. Przy obciążeniu jednostkowym („czujniku”) leżącym w tej płaszczyźnie mamy: $m_x \neq 0$, $n \neq 0$, $t_y \neq 0$, ale $m_y \equiv 0$, $m_z \equiv 0$, $t_z \equiv 0$ (rys. 9.31). Przy obciążeniu rzeczywistym jest na odwrót: $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$ i $T_z \neq 0$, zaś $M_x \equiv 0$, $N \equiv 0$, $T_y \equiv 0$, wobec czego we wzorze (9.8) wszystkie iloczyny $M_y m_y, \dots$ są tożsamościowo równe zeru i $f \equiv 0$, c.b.d.d.

11. We wzorze (9.2) pierwszy i trzeci składnik otrzymano jako pracę wypadkowej siły n i momentu m na przesunięciach du i $d\theta$ (rys. 9.21). Dowieść, że wynik ten można otrzymać z wzoru (9.11).

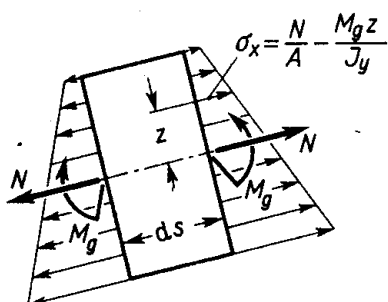
Rozwiązanie. W elemencie pręta (rys. 9.37) pod działaniem M_g i N oraz m i n powstają tylko naprężenia σ_x i $\bar{\sigma}_x$ podane na rysunku i wzór (9.11) przybiera postać

$$df = \frac{ds}{E} \int_A [(-M_g z/J_y) + (N/A)] [(-mz/J_y) + (n/A)] dA,$$

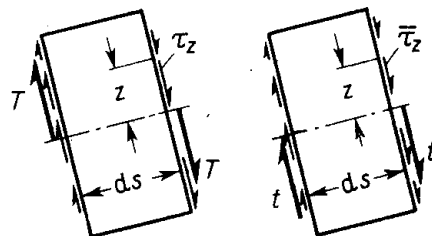
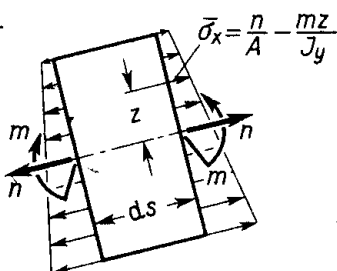
gdzie całkowanie obejmuje całe pole A przekroju pręta. Po wymnożeniu i uwzględnieniu, że $\int z^2 dA = J_y$, $\int z dA = 0$, otrzymujemy

$$df = (M_g m ds/EJ_y) + (Nn ds/EA),$$

a dla całego pręta sumę tych wyrażen jak w art. 9.3 [patrz wzór (9.2) oraz (c) i (d)].



Rys. 9.37. Oznaczenia do zadania 11



Rys. 9.38. Oznaczenia do zadania 12

12. Stosując postępowanie jak w zadaniu 11 obliczyć pracę siły tnącej t na przesunięciu dw_T (rys. 9.21) i określić stąd wartość ψ .

Rozwiązanie. W elemencie pręta (rys. 9.38) działanie sił T i t wywołuje tylko naprężenia styczne określone z wzoru (5.18)

$$\tau_z = TS_y^{(z)}/J_y b_z, \quad \bar{\tau}_z = tS_y^{(z)}/J_y b_z$$

i z wzoru (9.11) otrzymujemy dla elementu pręta

$$df_T = \frac{ds}{G} \int_A \frac{TS_y^{(z)}}{J_y b_z} \frac{tS_y^{(z)}}{J_y b_z} dA = \frac{Tt ds}{GA} \frac{A}{J_y^2} \int_A \left[\frac{S_y^{(z)}}{b_z} \right]^2 dA;$$

konfrontując ten wynik z środkowym członem wzoru (9.2) mamy

$$\psi = \frac{A}{J_y^2} \int_A \left[\frac{S_y^{(z)}}{b_z} \right]^2 dA \quad (9.12)$$

jako wartość bezwymiarowego współczynnika ψ . Dla przekroju na przykład prostokątnego mamy według rys. 5.40

$$A = bh, \quad J_y = bh^3/12, \quad S_y^{(z)} = (b/2) [(h^2/4) - z^2], \quad b_z = b = \text{const}, \quad dA = b dz$$

i granice całkowania $(-h/2; +h/2)$, skąd w wyniku $\psi = 1,2$. Podobnie postępujemy w przypadku innych przekrojów. Wiarygodność tak obliczonych wartości ψ jest rzędu 10% z uwagi na upraszczające założenia leżące u podstaw wzoru (5.18).

13. Pomijając wpływ sił wzdłużnych i tnących orzec, jak zmieniają się przemieszczenia punktów danej ramy obciążonej siłami skupionymi, na przykład z rys. 9.16, jeśli zwiększyć dwukrotnie tylko długości prętów?

Odp. Wzrosną ośmiokrotnie, gdyż w odpowiadających sobie punktach ustrojów rządne wykresów M_y, \dots, m_s wzrosną dwukrotnie, a zamiast długości ds wystąpi $2 ds$ i wszystkie wyrażenia podcałkowe wzrosną ośmiokrotnie, a granice całkowania nie zmieniają się.

14. Jak zmieniają się kąty obrotu odpowiadających sobie przekrojów pierwotnej i powiększonej ramy z zadania 13?

Odp. Wzrosną 4-krotnie, bo m_y, m_z i m_s nie zmieniają się.

15. Czy wynik zadania 13 jest słuszny dla kratownic?

Odp. Nie; patrz zadania 4 i 5 art. 9.3.

16. Zakładając w zadaniu 9, że $P = 0$, mamy f proporcjonalne do r^4 i dwukrotny wzrost r daje 16-krotny wzrost f , a nie 8-krotny jak w zadaniu 13. Skąd się bierze ta różnica? •

Odp. Momenty M_y i M_s są tu kwadratowymi funkcjami r , a nie liniowymi, jak to było w zadaniu 13.